L'objet du problème est de trouver la limite de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ quand x tend vers $+\infty$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.

Montrer, au moyen d'une intégration par parties, que la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_a^b f(t) \sin[(2n+1)t]\, dt$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$.

Montrer que g se prolonge par continuité en une fonction h sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Montrer que h' est continue en 0 et préciser $h'(0)$.

En déduire que h est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} h(t) \sin[(2n+1)t]\, dt = 0$.

3. Soit k_n la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $k_n(x) = \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt$ a un sens.

4. Montrer que pour tout réel x distinct de $k\pi$ (k entier relatif non nul) on a :

$$\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \ldots + 2\cos 2nx.$$

En déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}$.

5. Déduire des questions précédentes que la suite $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t} dt$ est convergente et trouver sa limite quand n tend vers l'infini.

6. A l'aide d'un changement de variable dans l'intégrale précédente, et en admettant que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite finie l quand x tend vers l'infini montrer que $l = \frac{\pi}{2}$.

Remarque : ce dernier résultat s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

7. Montrer que pour tout entier naturel n on a $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$.

La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt$ a t-elle une limite quand x tend vers l'infini ?

(on rappelle que la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$).

Correction :

1. On intègre par parties, f étant de classe C^1, en posant : $\begin{cases} u = f(t)\,; & u' = f'(t) \\ v' = \sin[(2n+1)t]\,; & v = -\frac{\cos[(2n+1)t]}{2n+1} \end{cases}$.

D'où

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-f(t)\frac{\cos[(2n+1)t]}{2n+1}\right]_a^b + \frac{1}{2n+1}\int_a^b f'(t)\cos[(2n+1)t]\, dt \\ &= \frac{f(a)\cos[(2n+1)a] - f(b)\cos[(2n+1)b]}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_a^b f'(t)\cos[(2n+1)t]\, dt. \end{aligned}$$

Il en résulte que $|I_n| \leq \frac{|f(a)|+|f(b)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\displaystyle\int_a^b |f'(t)| \cdot |\cos[(2n+1)t]|\, dt$, donc

$$|I_n| \leq \frac{|f(a)|+|f(b)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

Le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc, d'après le théorème de l'étau, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |I_n| = 0$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} I_n = 0}$.

2. On a pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \underset{0}{\sim} \frac{\sin x - x}{x^2} = \frac{x + o\left(x^2\right) - x}{x^2} = o(1)$, donc on a

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g(x) = 0$.

On peut donc prolonger g par continuité en 0 en posant $h(0) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme et quotient de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Au voisinage de 0 on a $x^2 \cos x = x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$ et $\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)$, d'où :

$$h'(x) = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \sim \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)}{x^4} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

On a donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} h'(x) = -\frac{1}{6}$.

Il résulte du théorème "limite-dérivée" (h étant continue en 0) que h est dérivable en 0 et que $h'(0) = -\frac{1}{6}$. De plus $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} h'(x) = -\frac{1}{6} = h'(0)$ donc h' est continue en 0.

D'autre part l'expression de $h'(x)$ montre que h' est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc elle est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi h est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après la question 1. on a $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} h(t) \sin[(2n+1)t]\, dt = 0}$.

3. Au voisinage de 0 on a $k_n(x) = \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} \sim \frac{(2n+1)x}{x} = 2n+1$. On peut donc prolonger k_n par continuité en 0 en posant $\widetilde{k_n}(0) = 2n+1$ et $\widetilde{k_n}$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On pose alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \widetilde{k_n}(t)\, dt$.

4. En utilisant la formule d'Euler on a $2\cos 2kx = e^{2ikx} + e^{-2ikx}$ donc, pour $x \neq k\pi$, $S_n = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \ldots + 2\cos 2nx = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2ikx} + e^{-2ikx}\right) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}$. C'est la somme d'une suite géométrique de raison e^{2ix}, de premier terme e^{-2inx} : $S = \frac{e^{-2inx} - e^{2ix}.e^{2inx}}{1 - e^{2ix}} = \frac{e^{ix}\left(e^{-i(2n+1)x} - e^{i(2n+1)x}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)} = \frac{-2i \sin[(2n+1)x]}{-2i \sin x}$.

On a donc $1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \ldots + 2\cos 2nx = \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}$.

En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ on obtient, par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi/2} \cos 2kx dt$; comme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 2kx dt = \left[\frac{\sin 2kx}{2k}\right]_0^{\pi/2} = 0$ on a $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}}$.

5. Comme $\frac{\sin[(2n+1)t]}{t} \underset{0}{\sim} 2n+1$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t} dt$ a un sens (comme en 3/).

On écrit, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin\left[(2n+1)\,t\right] dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2} h(t) \sin\left[(2n+1)\,t\right] dt + \frac{\pi}{2}$.

Comme la suite $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h(t) \sin\left[(2n+1)\,t\right] dt$ converge vers 0 on a donc $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{\pi/2} h(t) \sin\left[(2n+1)\,t\right] dt = \frac{\pi}{2}$.

6. On pose $u = (2n+1)\,t$ dans l'intégrale précédente : $du = (2n+1)\,dt$ soit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left[(2n+1)\,t\right]}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{n\pi+\pi/2} \frac{\sin u}{u} du.$$

En faisant tendre n vers l'infini on a donc $l = \displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{n\pi+\pi/2} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

7. Pour $n\pi \leq t \leq (n+1)\,\pi$ on a $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$, donc $\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi}$. En intégrant entre $n\pi$ et $(n+1)\,\pi$ on obtient $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt$.

Or $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt \geq \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t dt \right| = \left| [-\cos t]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \right| = 2$, d'où, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}}.$$

La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

On a, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$; cette dernière suite tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc $L = +\infty$ i.e. $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty}$.