$\boxed{\textbf{SR7}}$ Le but du problème est de montrer que e est irrationnel de deux façons.

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = e$ (ce qui s'écrit : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$) (on pourra utiliser une formule de Taylor).

Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. Montrer que e est irrationnel.

On veut montrer ce dernier résultat d'une autre faon.

Pour cela on considère la suite (I_n) définie par pour tout entier natuel n par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

4. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists\, (a, b) \in \mathbb{Z}^2 / u_n = a.e + b.$$

5. Montrer que : $\lim_{n \longrightarrow \infty} I_n = 0$.

En déduire que e est irrationnel.

Correction :

1. D'après la formule de Taylor-Lagrange on a, pour tout entier naturel n et tout réel x :

$$\exists c_{n,x} / e^x = 1 + x + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{c_{n,x}}}{(n+1)!},$$

avec $|c_{n,x}| \leq |x|$.

Pour $x = 1$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists c \in [0, 1]$ tel que : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$ soit $e = u_n + \frac{e^c}{(n+1)!}$.

Comme $0 \leq \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}$, on a $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{e^c}{(n+1)!} = 0$ donc $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = e$.

2. Voir Feuille d'exercices 3 (Suites réelles 2), 4/ 1.

3. Supposons que e soit rationnel : il exister deux entiers naturels p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.

Comme $u_1 < \frac{p}{q} < v_1$ on a : $2 < \frac{p}{q} < 3$ donc $q \geq 2$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $u_n < \frac{p}{q} < v_n$ soit : $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}$.

En multipliant les trois membres par $n!$ on obtient : $A < p.(q-1)! < A + \frac{1}{n}$ avec $A = n! + n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 \in \mathbb{N}$, donc $A < p.(q-1)! < A + 1$ ce qui est impossible car A et p.$(q-1)!$ sont des entiers naturels.

Conclusion : e est irrationnel.

4. Intégrons $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$ par parties :

$$\begin{cases} u = x^{n+1}, u' = (n+1)\, x^n \\ v' = e^x, v = e^x \end{cases}$$

donc $I_{n+1} = \left[x^{n+1}e^x\right]_0^1 - (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$, soit $I_{n+1} = e - (n+1)\, I_n$.

D'autre part on a : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

Soit $P(n)$ la propriété : $\exists\,(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ t.q. $I_n = a_n.e + b_n$.

La propriété est vraie au rang 0. Si elle est vraie au rang n on a :

$$\begin{aligned} & I_{n+1} \\ = \; & e - (n+1)\, I_n \\ = \; & e - (n+1)\,(a_n.e + b_n) \\ = \; & [1 - (n+1)\, a_n]\, e - (n+1)\, b_n \\ = \; & a_{n+1}.e + b_{n+1}. \end{aligned}$$

avec $a_{n+1} = 1 - (n+1)\, a_n$ et $b_{n+1} = -(n+1)\, b_n$ appartenant à $\mathbb{Z}$, donc la propriété $P(n)$ est vraie au rang $n+1$ donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

5. Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1]$ on a : $0 \leq x^n e^x \leq e x^n$ donc : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx \leq e\int_0^1 x^n dx$, soit $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

Comme $\dfrac{e}{n+1} \longrightarrow 0$ on a : $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} I_n = 0$.

6. Supposons que e soit rationnel il existe p et q entiers naturels tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = a_n.\dfrac{p}{q} + b_n$ donc $qI_n = a_n.p + qb_n$.

La suite (qI_n) est donc à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

De plus on a $I_n > 0$ pour tout entiers naturels n (car la fonction $x \longmapsto x^n e^x$ est positive non nulle sur $[0,1]$).

La suite (qI_n) est donc à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et tend vers 0 (d'après 5/) ce qui est absurde.

Conclusion : e est irrationnel.