Exos Suites et Intégrales

$\boxed{1}$ Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln^n x dx.$$

1. Montrer que cette suite converge et calculer sa limite.

2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire que

$$I_n \sim \frac{e^3}{n}.$$

3. En écrivant $I_n = \frac{e^3}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ trouver le developpement limité de I_n à l'ordre 2, i.e. une relation de la forme :

$$I_n = \frac{e^3}{n} + \frac{\lambda}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Correction :

$\boxed{1}$ **1.** Montrons que : $\forall x \in [1, e] : \ln x \leq \frac{x}{e}$.

Soit la fonction φ définie sur $I = [1, e]$ par $\varphi(x) = \frac{x}{e} - \ln x$. φ est dérivable sur I et $\varphi'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex} \leq 0$ sur I. φ est donc décroissante sur I et comme $\varphi(e) = 0$ on a : $\forall x \in [1, e] : \varphi(x) \geq 0$, d'où l'inégalité.

On a donc, pour tout x de $[1, e]$: $0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e} \Longrightarrow 0 \leq \ln^n x \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n$ pour tout entier n. En multipliant par x^2 et en intégrant entre 1 et e on obtient : $0 \leq I_n \leq \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n dx$. Or $\int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n dx = \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2} dx = \frac{1}{e^n} \left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_1^e = \frac{1}{e^n} \left[\frac{e^{n+3}-1}{n+3}\right] = \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{e^n(n+3)}$. Comme cette suite tend vers 0 on en déduit, d'après le théorème de l'étau, que $\boxed{\lim I_n = 0}$.

2. Intégrons $I_{n+1} = \int_1^e x^2 \ln^{n+1} x dx$ par partie en posant $u = \ln^{n+1} x$ (donc $u' = \frac{(n+1)\ln^n x}{x}$) et $v' = x^2$ ($v = \frac{x^3}{3}$), les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $I = [1, e]$. On obtient : $I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3} \ln^{n+1} x\right]_1^e - \frac{n+1}{3} \int_1^e \frac{x^3 \ln^n x}{x} dx$, soit $\boxed{I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n}$, pour tout entier naturel n.

Comme (I_n) tend vers 0, (I_{n+1}) aussi donc $\frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n \longrightarrow 0$, soit $(n+1) I_n \longrightarrow e^3$ d'où $I_n \sim \frac{e^3}{n+1}$. Comme $\frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$ on a donc : $\boxed{I_n \sim \frac{e^3}{n}}$.

On en déduit : $I_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3}{n+1} I_{n+1}$. Or $I_{n+1} \sim \frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$ donc $I_{n+1} = \frac{e^3}{n}(1 + o(1))$, soit $I_{n+1} = \frac{e^3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On a donc : $I_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3}{n+1}\left(\frac{e^3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3e^3}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or : $\frac{e^3}{n+1} = \frac{e^3}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e^3}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e^3}{n} - \frac{e^3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{3e^3}{n(n+1)} = \frac{3e^3}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3e^3}{n^2}(1 + o(1)) = \frac{3e^3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, soit $I_n = \frac{e^3}{n} - \frac{e^3}{n^2} - \frac{3e^3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\boxed{I_n = \frac{e^3}{n} - \frac{4e^3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$.