$\boxed{\textbf{SR1}}$ *Partie A:* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + 1.$$

3. Quelle est la limite de la suite (H_n) ? En donner un équivalent simple.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n}.$$

4. Etudier le sens de variation de (u_n). Que peut-on en déduire quant à sa limite ?

On suppose que (u_n) converge vers le réel l.

5. Expliquer pourquoi on a $l > 0$ et montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+1} - u_k \geq \dfrac{1}{k \times l}$.

6. Déduire des questions précédentes que : $\forall n \geq 2, u_n \geq 1 + \dfrac{\ln(n)}{l}$.

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Le but des questions suivantes est de trouver un équivalent de (u_n).

7. Pour k entier naturel non nul, simplifier $u_{k+1}^2 - u_k^2$.

En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $u_n^2 - u_1^2 = 2H_{n-1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2 u_k^2}$ (la suite (H_n) est définie au début).

8. On rappelle que la suite (v_n) définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ est convergente.

Montrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall n \geq 2, \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2 u_k^2} \leq M$.

9. Déduire des questions précédentes que

$$u_n \sim \sqrt{2 \ln n}.$$

Correction :

Partie A. **1.** Pour $0 < k \leq t \leq k+1$ on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ et en intégrant entre k et $k+1$ il vient $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$, soit $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. En sommant membres à membres les inégalités précédentes de $k = 1$ à n $(\in \mathbb{N}^*)$ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &\leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}, \text{ soit} \\ H_n + \frac{1}{n+1} - 1 &\leq \ln(n+1) \leq H_n. \end{aligned}$$

Cet encadrement s'écrit aussi, pour tout entier naturel non nul n : $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1$. Comme $-\frac{1}{n+1} < 0$ on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + 1}.$$

3. Comme $H_n \geq \ln(n+1)$ qui tend vers $+\infty$, on a, d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim H_n = +\infty}$.

De plus, pour tout entier naturel non nul n on a : $1 \leq \frac{H_n}{\ln(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n+1)}$ en divisant les trois membres de l'encadrement précédent par $\ln(n+1)$. Comme $\frac{1}{\ln(n+1)} \longrightarrow 0$ on a, d'après le théorème de l'étau, $\lim \frac{H_n}{\ln(n+1)} = 1$ soit $\boxed{H_n \sim \ln(n+1)}$.

Remarque : comme $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ on a aussi $H_n \sim \ln(n)$.

Partie B. **4.** Par une récurrence évidente on a $u_n > 0$ pour tout entier naturel non nul n.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{nu_n} > 0$ donc la suite (u_n) est (strictement) croissante.

La suite (u_n) a donc une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \geq u_1 = 1$ (car (u_n) est croissante), donc, en passant à la limite, on a $l \geq 1 > 0$.

D'autre part, (u_n) étant croissante, on a aussi $u_k \leq l$ pour tout entier naturel non nul k, soit $\frac{1}{ku_n} \geq \frac{1}{k \times l}$. On a alors : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+1} - u_k = \frac{1}{k \times u_n} \geq \frac{1}{k \times l}}$.

6. En sommant membres à membres les inégalités précédentes pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ (pour $n \geq 2$) on obtient, après simplifications : $u_n - u_1 \geq \frac{1}{l}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$. Or $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1} \geq \ln(n)$ d'après la question 2/, donc on a $u_n - u_1 \geq \frac{1}{l}\ln(n)$ soit

$$\boxed{\forall n \geq 2, u_n \geq 1 + \frac{\ln(n)}{l}}.$$

Comme $\ln(n) \longrightarrow +\infty$ on a donc $\lim u_n = +\infty$ (théorème de comparaison). Cela contredit l'hypothèse : $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\lim u_n = +\infty}$.

7. On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{ku_k}\right)^2 - u_k^2 = \frac{1}{k^2u_k^2} + \frac{2}{k}$.

En sommant les égalités précédentes de $k = 1$ à $n-1$ on obtient pour $n \geq 2$: $u_n^2 - u_1^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2u_k^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}$, soit $u_n^2 - u_1^2 = 2H_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2u_k^2}$.

8. On a $u_k \geq 1$ pour tout entier $k \neq 0$, donc $\frac{1}{k^2u_k^2} \leq \frac{1}{k^2}$. En sommant de $k = 1$ à $n-1$ ($n \geq 2$) il vient $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2u_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$. Comme la suite (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente elle est donc bornée soit : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \geq 1, v_n \leq M$, donc on a $\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2u_k^2} \leq M}$ pour $n \geq 2$.

9. D'après la question 7/ on a pour $n \geq 2$: $u_n^2 - u_1^2 = 2H_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2u_k^2}$, soit $u_n^2 = 1 + 2H_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2u_k^2}$. D'après 2/ on a $2\ln(n) \leq 2H_{n-1} \leq 2\ln(n) + 2$, donc, d'après 8/, on déduit pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} 1 + 2\ln(n) &\leq u_n^2 \leq 1 + 2\ln(n) + 1 + M, \text{ ou} \\ 2\ln(n) + 1 &\leq u_n^2 \leq 2\ln(n) + 2 + M. \end{aligned}$$

En divisant par $2\ln(n)$ (> 0) : $1 + \frac{1}{2\ln(n)} \leq \frac{u_n^2}{2\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} + \frac{M}{2\ln(n)}$. D'après le théorème de l'étau on a donc : $\lim \frac{u_n^2}{2\ln(n)} = 1$, donc $\frac{u_n}{\sqrt{2\ln(n)}} = 1$ ce qui signifie que $\boxed{u_n \sim \sqrt{2\ln n}}$.