$\boxed{\textbf{SR3}}$ **Algorithme de Babylone**

L'objectif de ce problème est de présenter deux suites de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ puis de comparer leur vitesse de convergence.

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Partie I. Première suite

On considère les suites réelles (p_n) et (q_n) définies par $p_0 = q_0 = 1$ et pour tout entier n :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + 2q_n \\ q_{n+1} &= p_n + q_n \end{aligned}$$

1. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont entiers strictement positifs.

b. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq q_n$.

On définit une suite réelle (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|.$$

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$ et une majoration de $\left|u_n - \sqrt{2}\right|$ en fonction de n et $\left|u_0 - \sqrt{2}\right|$.

Trouver à la calculatrice un entier n à partir duquel on a $\left|u_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-10}$.

Partie II. Deuxième suite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. On considère la suite réelle (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n) = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est un nombre rationnel de l'intervalle $[1, 2]$.

4. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$, puis que $\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2}$.

5. En déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}\left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2^n}.$$

Conclusion pour la convergence de (v_n) ?

6. Trouver à la calculatrice un rang à partir duquel on a : $\left|v_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-10}$.

Comparer la vitesse de convergence des deux suites.[ex4.2012]

Correction : **Partie I. Première suite**

1. a. Récurrence facile.

1. b. On a $p_0 \geq q_0$. Si $n \geq 1$ on a $p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1} \geq p_{n-1} + q_{n-1} = q_n$.

2. a. Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$; en divisant numérateur et dénominateur par q_n ($\neq 0$) on obtient : $u_{n+1} = \frac{2 + p_n/q_n}{1 + p_n/q_n}$, soit $\boxed{u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}}$.

2. b. Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1}$, soit $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)u_n - \sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{u_n + 1} = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)}{1 + u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

Or $1 + u_n \geq 2$, donc $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \frac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

2. c. Par une récurrence facile on déduit de l'inégalité précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$.

Comme $0 < \frac{\sqrt{2}-1}{2} < 1$, on a $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$.

D'après le théorème de l'étau on a : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \longrightarrow 0$, soit $\boxed{\lim u_n = \sqrt{2}}$.

Comme $u_0 = 1$ on a $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| < 1$, donc $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n. Pour avoir $\left|u_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-10}$, il *suffit* donc d'avoir : $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n < 10^{-10}$. A la calculatrice on obtient $n \geq 15$.

Partie II. Deuxième suite

3. Soit P_n la proprité : "$v_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in [1, 2]$".

Comme $v_0 = 1$, la propriété P_0 est vraie.

Supposons la propriété P_n vraie pour un entier fixé n. On a $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + \frac{1}{v_n} \in \mathbb{Q}$ (car $v_n \in \mathbb{Q}$).

De plus : $1 \leq v_n \leq 2$, d'où $1 \leq \frac{2}{v_n} \leq 2$. En ajoutant membres à membres : $2 \leq v_n + \frac{2}{v_n} \leq 4$, d'où $1 \leq \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right) \leq 2$, soit $1 \leq v_{n+1} \leq 2$. La propriété P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : la propriété est initialisée à $n = 0$ et héréditaire donc pour tout entier naturel n on a $v_n \in [1, 2]$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{v_n^2 + 2 - \sqrt{2}v_n}{2v_n} = \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$.

Comme $v_n \geq 1$ on a $\frac{1}{v_n} \leq 1$, donc $\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2}$.

5. Soit P_n la proprité : "$\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2^n}$".

Comme $\frac{1}{2^{2^0 - 1}} = \frac{1}{2^0} = 1$, la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Supposons la propriété P_n vraie pour un entier fixé n. D'après 4/ on a : $\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2}$, et d'après l'hypothèse de récurrence : $\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2^n}$, donc $\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|v_n - \sqrt{2}\right|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n - 1}}\right)^2 \left(\left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2} . \frac{1}{2^{2^{n+1} - 2}} . \left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2^{n+1}}$, soit $\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^{n+1} - 1}} . \left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2}$
La propriété P_n est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est initialisée à $n = 0$ et héréditaire donc pour tout entier naturel n on a $\left|v_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2^n}$.

6. D'après l'inégalité précédente, pour avoir $\left|u_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-10}$ il suffit que . $\frac{1}{2^{2^n - 1}} \left|v_0 - \sqrt{2}\right|^{2^n} < 10^{-10}$, soit $\frac{1}{2^{2^n - 1}} \left|1 - \sqrt{2}\right|^{2^n} < 10^{-10}$.

A la calculatrice on trouve : $n \geq 4$.

Il semble que la suite (v_n) converge plus vite que (u_n) vers$\sqrt{2}$.