$\boxed{\textbf{SR4}}$ On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

1. a. Calculer $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt = \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ écrire S_n sous la forme $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\, dt$ où f est une fonction à préciser (à exprimer à l'aide d'un "sigma").

2. a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ pour $t \not\equiv 0\,(2\pi)$.

En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \not\equiv 0\,(2\pi)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{t^2 \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

3. On considère la fonction g définie par $g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ si } t \in \left]0, 2\pi\right[\\ 0 \text{ si } t = 0. \end{cases}$.

Montrer que g est de classe C^1 sur $[0, 2\pi[$.

4. Soit si h est une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

a. Justifier l'existence du réel $M = \displaystyle\sup_{t\in[0,\pi]} |h'(t)|$.

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^{\pi} h(t) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] dt\right| \leq \frac{|h(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}} \times M.$$

Quelle est la limite de la suite $\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) dt$?

5. Déduire des questions précédentes que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{12}$.

6. Soit la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Vérifier que $x_{2n} - S_{2n} = \frac{1}{2}x_n$ pour tout entier naturel non nul n et en déduire que (x_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

<u>*Correction*</u> : **1. a.** On effectue une intégration par parties dans $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt$ en posant $u = t^2$ et $v' = \cos(kt)$, donc $u' = 2t$ et $v = \frac{\sin(kt)}{k}$ (u et v étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$). On obtient $I_k = \left[t^2 \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} t\sin(kt)\, dt = -\frac{2}{k}\int_0^{\pi} t\sin(kt)\, dt$. On refait un autre IPP

en posant $u = t$ et $v' = \sin(kt)$ donc $u' = 1$, $v = -\frac{\cos(nt)}{n}$. On obtient $\int_0^\pi t\sin(nt)\,dt = \left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\,dt$, soit $\int_0^\pi t\sin(kt)\,dt = -\pi\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = -\pi\frac{(-1)^k}{k}$, soit $\boxed{I_k = 2\pi\frac{(-1)^k}{k^2}}$.

Pour $a = -\frac{1}{2\pi}$ on aura $a\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(kt)\,dt = \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a par linéarité de l'intégrale : $S_n = \sum\limits_{k=1}^n a\int_0^\pi t^2\cos(kt)\,dt = \int_0^\pi \sum\limits_{k=1}^n at^2\cos(kt)\,dt$, soit $S_n = \int_0^\pi at^2\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt)\,dt = \int_0^\pi f(t)\,dt$ avec $\boxed{f(t) = -\frac{1}{2\pi}t^2\displaystyle\sum_{k=1}^n\cos(kt)}$.

2. a. $s = \displaystyle\sum_{k=-n}^n e^{ikt}$ est la somme d'une suite géométrique de raison e^{it} et de premier terme e^{-int} donc $s = \frac{e^{-int}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{it/2}\left[e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\right]}{e^{it/2}\left[e^{-\frac{t}{2}}-e^{\frac{t}{2}}\right]} = \frac{-2i\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

D'autre part on a $s = 1+\displaystyle\sum_{k=1}^n\left(e^{ikt}+e^{-ikt}\right) = 1+2\sum_{k=1}^n\cos(kt)$, d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^n\cos(kt) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}}$.

b. D'après 2/ b/ on a $S_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\displaystyle\sum_{k=1}^n\cos(kt) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\left[\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right]dt$, soit $S_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi t^2dt - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\frac{t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$. Comme $\int_0^\pi t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}$ on obtient $\boxed{S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\frac{t^2\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt}$.

3. Au voisinage de 0 on a $\dfrac{t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sim \frac{t^2}{t/2} = 2t$. On a donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0.

Pour montrer que g est dérivable en 0 on emploie le théorème "limit-dérivée". Pour $t \in]0, 2\pi[$, g est dérivable comme quotient et composée de fonctions dérivables et $g'(t) = \frac{2t\sin(t/2)-\frac{t^2}{2}\cos(t/2)}{\sin^2(t/2)} = \frac{4t\sin(t/2)-t^2\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)}$.

g' est donc continue sur $]0, 2\pi[$. Au voisinage de 0 on a $g'(t) \sim \frac{4t\sin(t/2)-t^2\cos(t/2)}{t^2/2} = \frac{8t\sin(t/2)-2t^2\cos(t/2)}{t^2}$. On effectue un dl du numérateur à l'ordre 2 : $\sin(t/2) = \frac{t}{2} + o(t^2)$ donc $8t\sin(t/2) = 4t^2 + o(t^2)$, $\cos(t/2) = 1 + o(1)$ donc $2t^2\cos(t/2) = 2t^2 + o(t^2)$, soit $g'(t) = \frac{2t^2+o\left(t^2\right)}{t^2} = 2 + o(1)$, donc $g'(t) \underset{t\to 0}{\to} 2$.

g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 2$. De plus $g'(t) \underset{t\to 0}{\to} g'(0)$ donc g' est continue en 0.

Conclusion : la fonction g est donc de classe C^1 sur $[0, 2\pi[$.

4. a. La fonction h' est continue sur $[0, \pi]$ (car h est de classe C^1 sur $[0, \pi]$) donc h' est bornée sur cet intervalle et donc M existe.

b. On intègre $I = \int_0^\pi h(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$ par parties en posant $u = h(t)$ et $v' = \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]$ soit $u' = h'(t)$ et $v = -\frac{\cos[(n+1/2)t]}{n+1/2}$ donc $\int_0^\pi h(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt = \left[-h(t)\frac{\cos[(n+1/2)t]}{n+1/2}\right]_0^\pi + \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi h'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$, soit $I = \frac{h(0)}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi h'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$.

On a donc $|I| \leq \frac{|h(0)|}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2}\left|\int_0^\pi h'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}t\right)\right]dt\right|$ (inégalité triangulaire). D'autre part on a $\left|\int_0^\pi h'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}t\right)\right]dt\right| \le \int_0^\pi \left|h'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}t\right)\right]\right|dt$ et $\left|h'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}t\right)\right]\right| \le M$, donc $\int_0^\pi \left|h'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}t\right)\right]\right|dt \le \int_0^\pi Mdt = \pi M$.

Finalement on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^\pi h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dt\right| \le \frac{|h(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}} \times M}$.

Comme la suite $\frac{|h(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}} \times M$ converge vers 0 il en résulte, d'après le théorème de l'étau que la suite $\int_0^\pi h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dt$ converge vers 0.

5. D'après 2/ b/ on a $S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$ et d'après la question précédente la suite $\int_0^\pi g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$ converge vers 0, donc on a $\boxed{\lim S_n = \frac{\pi^2}{12}}$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x_{2n} - S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1-(-1)^{k-1}}{k^2}$. Or on a $1-(-1)^{k-1} = 0$ si k impair et 2 si k est pair. Donc $x_{2n} - S_{2n} = \displaystyle\sum_{k\ \text{pair}, k=1}^{2n}\frac{2}{k^2}$. On effectue le changement d'indice $k = 2p$, d'où $x_{2n} - S_{2n} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$, soit $x_{2n} - S_{2n} = \frac{1}{2}x_n$.

On a démontré en exercice (feuille 2, V/) que la suite (x_n) est convergent (car croissante et majorée). Si l est la limite on obtient en passant l'égalité précédente à la limite : $l - \frac{\pi^2}{12} = \frac{l}{2}$, $\boxed{l = \frac{\pi^2}{6}}$.