$\boxed{\textbf{SR5}}$ Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}dx$.

On pourra utiliser le résultat suivant : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ (voir problème précédent).

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x de $]0,1[$:

$$\frac{x\ln(x)}{1-x} = x\ln(x) + x^2\ln(x) + \ldots + x^{n-1}\ln(x) + \frac{x^n\ln(x)}{1-x}.$$

2. Soit $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k \ln(x)\,dx$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que cette intégrale est bien définie et que pour tout entier naturel non nul k on a :

$$I_k = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

(on commencera par calculer $I_k(a) = \displaystyle\int_a^1 x^k\ln(x)\,dx$ avec a réel de l'intervalle $]0,1[$).

3. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{1-x}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

En déduire qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^1 \frac{x^n\ln(x)}{1-x}dx\right| \leq \frac{M}{n}.$$

Que peut-on dire de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\ln(x)}{1-x}dx$?

4. Déduire des questions précédentes la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1-x}dx$.

<u>*Correction*</u> : **1.** $S_n = x\ln(x) + x^2\ln(x) + \ldots + x^{n-1}\ln(x)$ est la somme d'une suite géométrique de raison x et de premier terme $x\ln(x)$ donc $S_n = \frac{x\ln x - x^n\ln(x)}{1-x}$, soit $x\ln(x) + x^2\ln(x) + \ldots + x^{n-1}\ln(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x} - \frac{x^n\ln(x)}{1-x}$ ce qui donne la relation indiquée.

2. On a $\lim\limits_{x\to 0} x^k\ln(x) = 0$ donc la fonction $f_k : x \longmapsto x^k\ln(x)$ se prolonge par continuité en 0 en posant $\widetilde{f_k}(0) = 0$ et $\widetilde{f_k}(x) = x^k\ln(x)$ si $x \in]0,1]$. On a alors $I_k = \int_0^1 \widetilde{f_k}(x)\,dx$ qui est bien définie car $\widetilde{f_k}$ est continue sur $[0,1]$.

Pour $a \in]0,1[$ on intègre par parties $I_k(a) = \int_a^1 x^k\ln(x)\,dx$ en posant $\begin{cases} u = \ln(x)\,; & u' = 1/x \\ v' = x^k; & v = \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{cases}$ (u et v étant de classe C^1 sur $[a,1]$) : $I_k(a) = \left[\frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1}\right]_a^1 - \frac{1}{k+1}\int_a^1 x^k dx = -\frac{a^{k+1}\ln(a)}{k+1} - \frac{1}{k+1}\left(\frac{1-a^{k+1}}{k+1}\right)$.

Comme $a^{k+1}\ln(a) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\lim\limits_{a\to 0} I_k(a) = \boxed{-\frac{1}{(k+1)^2} = I_k}$.

3. Soit $\varphi : x \longmapsto \frac{x\ln(x)}{1-x}$. On a $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ (car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$) et en posant $x = 1+h, \varphi(x) = \frac{(1+h)\ln(1+h)}{-h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -1$ donc φ se prolonge par continuité en 0 et en 1 en posant

$\widetilde{\varphi}(0) = 0$ et $\widetilde{\varphi}(1) = -1$. La fonction ainsi prolongée est continue sur $[0,1]$ (quotient de fonctions continues sur $]0,1[$).

Cette fonction est donc bornée sur $[0,1]$: $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in [0,1], |\widetilde{\varphi}(x)| \leq M$.

On a, pour tout entier naturel $n \neq 0$: $\left|\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x} dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{x^n \ln(x)}{1-x}\right| dx = \int_0^1 x^{n-1} |\widetilde{\varphi}(x)| \, dx$.
Comme $0 \leq x^{n-1} |\widetilde{\varphi}(x)| \leq M x^{n-1}$ pour $x \in [0,1]$ il vient en intégrant entre 0 et 1 : $\int_0^1 x^{n-1} |\widetilde{\varphi}(x)| \, dx \leq M \int_0^1 x^{n-1} dx = M \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{M}{n}$. Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x} dx\right| \leq \frac{M}{n}}$.

Comme la suite M/n converge vers 0 la suite (x_n) tend vers 0 (théorème de l'étau).

4. En intégrant les deux membres de la relation du 1/ on obtient, pour tout entier $n \geq 1$, grâce à la linéarité de l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{x \ln(x)}{1-x} dx = \int_0^1 x \ln(x) \, dx + \int_0^1 x^2 \ln(x) \, dx + \ldots + \int_0^1 x^{n-1} \ln(x) \, dx + \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x} dx$, soit $I = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} + x_n$ d'après 2/, ou $I = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + x_n = 1 - u_n + x_n$.

Comme la suite (x_n) tend vers 0 (3/) et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ il s'ensuit que $\boxed{I = \int_0^1 \frac{x \ln(x)}{1-x} dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}}$.