1 Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

2 Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire la nature de la suite (x_n) définie par $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et un équivalent.

3 Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Trouver la limite et un équivalent de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ \ldots \ + \frac{1}{n\ln(n)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

4 Soit (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.

a. Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\frac{1}{1+(1+x)^2} \leq \arctan(x+1) - \arctan(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$.

b. En déduire que la suite (S_n) est convergente et préciser un encadrement de la limite.

5 Soit f une fonction de signe constant, non nulle et dérivable dans l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

6 Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1[$ on a : $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7 Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$.

8 Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.