

1 Calculer les développements limités de la fonction f à l'ordre n au voisinage de 0 :

a. $f(x) = e^x \arctan x$, $n = 5$;

b. $f(x) = \sqrt{1+x} \sin x$;

c. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$, $n = 4$;

d. $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, $n = 5$;

e. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n = 4$;

f. $f(x) = e^{\cos x}$, $n = 5$; g. $f(x) = (1+x)^x$, $n = 3$;

h. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$, $n = 2$;

i. $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+2x)}{1+x}\right)$, $n = 2$;

j. $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$, $n = 3$;

k. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$, $n = 2$;

l. $f(x) = \ln^2(\cos x)$, $n = 4$;

m. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $n = 5$; en déduire celui de $\arcsin^2 x$ en 0 à l'ordre 6.

n. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$.

2 Limite en 0 de la fonction f , prolongement par continuité et dérivabilité en 0 :

a. $\frac{\ln(1+x) - x}{x}$; b. $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ c. $\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$; d. $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$; e. $\frac{1}{\sin^5 x} (x - \frac{2}{3} \sin x - \frac{1}{3} \tan x)$; f. $(\cos x)^{\ln|x|}$.

3 Calculer le développement limité généralisé en 0 jusqu'au terme en x^2 des fonctions f suivantes et préciser l'allure au voisinage de 0 du graphique de f :

a. $f(x) = \frac{\cos x}{\ln(1+x)}$;

b. $f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \tan x}$;

c. $f(x) = \frac{1}{x \ln(1+x)}$.

d. $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$.

4 Préciser l'allure au voisinage de 0 du graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

5 Trouver l'asymptote oblique du graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}.$$

6 Trouver l'asymptote oblique du graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}.$$

7 Calculer le développement limité généralisé en $+\infty$ de fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

jusqu'au terme en $\circ(1/x^2)$.

En déduire l'asymptote oblique de f en $+\infty$ et sa position par rapport à la courbe.

8 Calculer le développement limité généralisé en $+\infty$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$$

jusqu'au terme en x^2 .

9 Calculer le développement limité généralisé en $+\infty$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{3+x}}$$

jusqu'au terme en $o(1/x^3)$.

10 Soient f et g deux applications de limite 0 en 0 ayant un développement limité à l'ordre 3 en 0. Trouver le développement limité de $f \circ g - g \circ f$ en 0.

11 Déterminer les réels a , b et c de façon à ce que $\frac{a}{x} + \frac{b}{\sin x} + \frac{c}{\tan x}$ soit en 0 un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible.